III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

XII. osztály

1. feladat. Adott az $f_n\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\cdot\ln^2 x$ függvény, ahol $n\in\mathbb{N}$.

a) Határozd meg f_n-nek azt az F_n primitív függvényét, amelyre $F_n(1)=0$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n(e)}{e^n}$ határértéket!

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás.

a) Mivel f_n folytonos a $(0,+\infty)$ intervallumon, ezért létezik az F_n primitív függvénye. (**1 pont**)
A következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
\int f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\cdot\ln^2 x\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^2 x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^2 x-\frac{2}{n+1}\cdot\int x^n\cdot\ln x\,\mathrm{d}x \qquad (\textbf{2 pont})\\
&=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^2 x-\frac{2}{n+1}\cdot\int\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\cdot\ln x\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^2 x-\frac{2}{n+1}\cdot\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]\\
&=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^2 x-2\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\ln x+\frac{2}{(n+1)^2}\cdot\int x^n\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^2 x-2\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\ln x+\frac{2}{(n+1)^2}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\\
&=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^2 x-2\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\ln x+2\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)^3}+c. \qquad (\textbf{2 pont})
\end{aligned}$$

Mivel $F_n(1)=0$, ezért $F_n(1)=\frac{2}{(n+1)^3}+c=0$, tehát $c=\frac{-2}{(n+1)^3}$. (**1 pont**)
A keresett primitív tehát

$$F_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^2 x-2\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\ln x+2\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)^3}-\frac{2}{(n+1)^3}.$$

b) Írhatjuk, hogy $F_n(e)=\frac{e^{n+1}}{n+1}-2\cdot\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2}+2\cdot\frac{e^{n+1}}{(n+1)^3}-\frac{2}{(n+1)^3}$, ahonnan (**1 pont**)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(e)}{e^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{n+1}-\frac{2\cdot e}{(n+1)^2}+\frac{2\cdot e}{(n+1)^3}-\frac{2}{e^n(n+1)^3}\right)=0. \qquad (\textbf{2 pont})$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat. Értelmezzük a $G = (0, 1)$ halmazon a következő műveletet

$$x * y = \frac{xy}{2xy + 1 - (x + y)},$$

bármely $x, y \in G$ estén.

a) Igazold, hogy a G halmaz zárt a „$*$” műveletre nézve!

b) Határozd meg az $f : G \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{ax}{bx-b}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ képlettel értelmezett függvényt úgy, hogy teljesüljön

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y),$$

bármely $x, y \in G$ esetén!

c) Számítsd ki az $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{n+1}$ kifejezés értékét, tudva azt, hogy a „$*$” művelet asszociatív!

Cziprok András, Szatmárnémeti
Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás.

a) Mivel $x, y \in (0, 1)$, ezért $xy \in (0, 1)$, $1 - x \in (0, 1)$ és $1 - y \in (0, 1)$. Így $(1 - x) \cdot (1 - y) \in (0, 1)$. Innen következik, hogy

$$\frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)} > 0, \quad \forall x, y \in (0, 1)$$ **(1 pont)**

és $xy < xy + (1 - x)(1 - y)$, tehát $\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)} < 1$, $\forall x, y \in (0, 1)$. **(1 pont)**
Az előbbiek alapján $x * y \in (0, 1)$, $\forall x, y \in (0, 1)$.

b) Az a) alpont alapján $x * y \in (0, 1)$, $\forall x, y \in (0, 1)$, tehát $f(x * y)$ értelmezett. **(1 pont)**
Írhatjuk, hogy

$$f(x * y) = \frac{a \cdot (x * y)}{b \cdot (x * y - 1)} = \frac{a \cdot \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}}{b \cdot \left(\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)} - 1\right)} = \frac{axy}{-b(1 - x)(1 - y)}, \quad \forall x, y, \in (0, 1), \tag{1}$$

valamint

$$f(x)f(y) = \frac{ax}{bx - b} \cdot \frac{ay}{by - b} = \frac{a^2xy}{b^2(1 - x)(1 - y)}, \quad \forall x, y \in (0, 1). \tag{2}$$

(1 pont)

Az (1) és (2) összefüggések alapján

$$\frac{axy}{-b(1 - x)(1 - y)} = \frac{a^2xy}{b^2(1 - x)(1 - y)}, \quad \forall x, y \in (0, 1),$$

tehát $-\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$. Mivel $a, b \in \mathbb{R}^*$, ezért $\frac{a}{b} = -1$, vagyis $a = -b$. Innen következik, hogy

$$f(x) = \frac{x}{1 - x}, \quad \forall x \in (0, 1)$$ **(1 pont)**

Mivel $x \in (0, 1)$, ezért $f(x) > 0$, tehát f jól értelmezett. **(1 pont)**

c) Mivel a művelet asszociatív és $f(x*y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y \in (0,1)$ ezért matematikai indukcióval belátható, hogy

$$f(x_1 * x_2 * \ldots * x_n) = f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot \ldots \cdot f(x_n), \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Megjegyzés. Ha a versenyző nem végzi el az indukcióval való bizonyítást, de utal rá, akkor is jár a pont.

Legyen $a = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{n+1}$. Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1\cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Ez alapján $\frac{a}{1-a} = \frac{1}{n!}$, tehát $a = \frac{1}{n!+1}$. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Ha egy valós számokból álló véges számsorozatban bármely 7 egymást követő tag összege negatív és bármely 11 egymást követő tag összege pozitív, akkor határozd meg a sorozatban a tagok számának a maximumát. *Matlap*

Megoldás. Legyen a sorozat $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{11,7}(\mathbb{R}).$$

Ekkor a mátrix minden sorában az elemek összege negatív, tehát a mátrix elemeinek összege negatív. Ugyanakkor a mátrix minden oszlopában az elemek összege pozitív, azaz a mátrix elemeinek összege pozitív, ellentmondás.

Tehát a sorozatnak nem lehet 17 vagy annál több eleme. **(5 pont)**

Szerkesztést 16 tagú sorozatra tudunk adni, például

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5 - 13, 5, 5 \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat.

a) Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ deriválható függvényeket, amelyekre

$$2020 f(x) + f'(x) = 0,$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

b) Adottak az $a < b$ valós számok és az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely deriválható az (a,b) intervallumon és amelyre $f(a) = f(b) = 0$. Igazold, hogy létezik $c \in (a,b)$ úgy, hogy

$$2020f(c) + f'(c) = 0.$$

Kovács Bálint, Székelyudvarhely

Megoldás.

a) A $2020f(x) + f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ összefüggést az

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2020, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

alakba írhatjuk, mert $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **(2 pont)**
Innen következik, hogy

$$\big(\ln f(x)\big)' = -2020,$$

vagyis $\ln f(x) = -2020x + c_1$, ahonnan az

$$f(x) = e^{-2020x+c_1} = e^{c_1} \cdot e^{-2020x} = c \cdot e^{-2020x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

eredményhez jutunk, ahol $c \in (0, +\infty)$ tetszőleges konstans. **(2 pont)**

b) Tekintsük a $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{2020x} \cdot f(x)$ függvényt. **(3 pont)**
Mivel f folytonos az $[a,b]$-n és deriválható az (a,b)-n, ugyanez g-ről is elmondható. Tehát g Rolle-tulajdonságú. Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy $g(a) = g(b) = 0$ teljesül, így alkalmazhatjuk a Rolle-tételt (vagy az utóbbi észrevétel nélkül egyből a Lagrange-tételt), amely szerint létezik $c \in (a,b)$ úgy, hogy $g'(c) = 0$. **(1 pont)**
Mivel

$$g'(x) = (e^{2020x}f(x))' = e^{2020x}(2020f(x) + f'(x)),$$

ezért a $g'(c) = 0$ összefüggés rendre ekvivalens az alábbiakkal:

$$e^{2020c}(2020f(c) + f'(c)) = 0,$$
$$2020f(c) + f'(c) = 0.$$ **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■